ЛА Касторев 22-10-12

Алгебрични допълнения и подопределители

Ако $\det(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ е детерминанта от n-ти ред за произвеждането $1 \le p,q \le n$ подопределителят Δ_{pq} е детерминантата на матрицата получена от първоначалната $(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ чрез премахване на реда с номер p и стълбът с номер q

Тв. $\boxed{A_{pq} = (-1)^{p+q}\Delta_{pq}}$ Формулата

Док.

$$\Delta_{pq} = \sum_{(i_1 - i_p = i_q - i_n)} (-1)^{[i_1 - i_p = i_q - i_n]} a_{1i_1}, a_{2i_2} - a_{p-1 i_{p-1}}, a_{p+1 i_{p+1}} - a_{ni_n}$$

Съвпадат с $(-1)^{p+q}\Delta_{pq}$ сега всяко събираемо на A_{pq} да е събираемо на $(-1)^{p+q}\Delta_{pq}$

Пълната загова е равенството броя събираеми $(n-1)!$ на A_{pq} и $(-1)^{p+q}\Delta_{pq}$

Всяко събираемо $(\lambda_i) = a_{1i_1} - a_{p-1 i_{p-1}}, a_{p+1 i_{p+1}} - a_{ni_n}$ участва в $(-1)^{p+q}\Delta_{pq}$ с точност до знак защото всяко произведение на $n-1$ елемента на $(a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ взети от редовете с номера различни от q. Знакът на λ_i е $\operatorname{sign}(\lambda_i) = (-1)^{[i_1 - i_p = i_q - i_n]} = (-1)^{p-1}(-1)^{[i_p = i_q, i_1, i_{p-1} - i_n]}$
$= (-1)^{p-1}(-1)^{q-1}(-1)^{[i_1, i_{p-1}, i_{p+1}, - i_n]} = (-1)^{p+q}(-1)^{[i_1 i_{p-1} - i_n]} =$ знакът на разместване $i_p = q$ с $i_{p-1} - i_2, i_1$

$a_{11}, a_{p+1} - a_{nn}$ б
$(-1)^{p+q}\Delta_{pq}$

Извеждането на q в началото променя инверсиите между q и $1,2 - q-1$

(Сл) ①

$$\det(a_{ij}) = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{p+s} a_{ps} \Delta_{ps}$$

(Сл) ②

Фактическо разлагане на детерминанта по ред

$$\sum_{s=1}^{n} a_{ps} A_{rs} = \delta_{pr} \det(A) = \begin{cases} \det(A) \text{ за } r = p \\ 0 \text{ за } r \neq p \end{cases}$$

$$1 \leq i, j \leq n \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ за } i = j \\ 0 \text{ за } i \neq j \end{cases}$$

Фактическо разлагане по стълб

$$\sum_{s=1}^{n} a_{sq} A_{sr} = \delta_{qr} \det A = \begin{cases} \det(A) \text{ за } r = q \\ 0 \text{ за } r \neq q \end{cases}$$

Ако $r \neq p$ то $\sum_{s=1}^{n} a_{ps} A_{rs}$ е $\det \begin{pmatrix} a_{p1} & \dots & a_{pn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rn} \end{pmatrix}$ ← развитие относно r-ти ред

от свойство 3 $\Rightarrow \det = 0$ (има 2 еднакви реда)

За $r \neq q \Rightarrow \sum_{s=1}^{n} a_{sq} A_{rs} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} & \dots \\ a_{2q} & \dots & a_{2q} & \dots \\ a_{nq} & \dots & a_{nq} & \dots \end{pmatrix} = 0$

има равни стълбове

Транспониране и събиране на матрици
Умножение на матрица с число

Деф:
Ако $A \in M_{m,n}(F)$ то транспонираната A^t има елементи $(A^t)_{ij} = A_{ji}$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ A_{i1} & \cdots & A_{in} \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{i1} \\ A_{1n} & A_{in} \end{pmatrix} \in M_{n,m}(F)$$

Деф
Ако $A, B \in M_{m,n}(F)$ то $A+B \in M_{m,n}(F)$ има елементи

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

Деф
Ако $A \in M_{m,n}(F)$, $\lambda \in F$ то $\lambda A \in M_{m,n}(F)$ има елементи $(\lambda A)_{ij} = \lambda A_{ij}$

ТЕ
Транспонирането на матрица изпълнява следните свойства

1) $(A+B)^t = A^t + B^t$
2) $(\lambda A)^t = \lambda A^t$ за $A, B \in M_{m,n}(F)$, $\lambda \in F$

Доказателство

1) за $X, Y \in M_{m,n}(F)$ използваме че съвпадат $X = Y \Rightarrow$
$X_{ij} = Y_{ij}$ за $\forall\, 1 \le i, j \le n$

$$\left[(A+B)^t\right]_{ij} = (AB)_{ji} = A_{ji} + B_{ji} = (A^t)_{ij} + (B^t)_{ij} \Rightarrow$$

$$(A+B)^t = A^t + B^t$$

2) $[(\lambda A)^t]_{ij} = (\lambda A)_{ji} = \lambda A_{ji} = \lambda (A^t)_{ij} = (\lambda A^t)_{ij} \Rightarrow$

$$(\lambda A)^t = \lambda A^t$$

[6]

Събирането на матрици и умножението на матрица с число удовлетворяват следните свойства

1) комутативност на събирането

$A+B = B+A$ за $\forall A,B \in M_{m,n}(F)$

2) асоциативност на събирането

$(A+B)+C = A+(B+C)$ за $\forall A,B,C \in M_{m,n}(F)$

3) $\exists O \in M_{m,n}(F)$ (нулева матрица) с $O_{ij}=0$ за $\forall 1 \le i,j \le n$, т.е

$A + O_{m\times n} = A$ за $\forall A \in M_{m,n}(F)$

4) За $\forall A \in M_{m,n}(F)$ $\exists$ противоположна $(-A) \in M_{m,n}(F)$ и е

$(-A)_{ij} = -A_{ij}$, т.е $A+(-A) = O_{m\times n}$

5) Дистрибутивен закон на скаларен множител спрямо

$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$ за $\forall A \in M_{m,n}(F)$ и $\lambda, \mu \in F$

6) Дистрибутивен закон над векторен множител

$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ за $\forall \lambda \in F$, $\forall A,B \in M_{m,n}(F)$

7) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ за $\forall \lambda,\mu \in F$ и $A \in M_{m,n}(F)$

8) $1 \cdot A = A$ за $1 \in F$ и $\forall A \in M_{m,n}(F)$

Доказателство

1) $(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij} =$ $\quad / A_{ij}, B_{ij} \in F$

$= B_{ij} + A_{ij} = (B+A)_{ij}$ за $\forall 1 \le i,j \le n \Rightarrow A+B = B+A$

2) от 1) $(A_{ij} + B_{ij}) + C_{ij} =$ събирането в F е асоциативно $=$

$A_{ij} + (B_{ij} + C_{ij}) = A_{ij} + (B+C)_{ij}$ или $(A+B)+C = A+(B+C)$

3) $(A + O_{m\times n})_{ij} = A_{ij} + 0 = A_{ij}$

свойство на $0 \in F$

4) $[A+(-A)]_{ij} = A_{ij} - A_{ij} = 0 = (0_{m\times n})_{ij}$

5) $[(\lambda+\mu)A]_{ij} = (\lambda+\mu)A_{ij} = \lambda A_{ij} + \mu A_{ij} = \lambda A + \mu A$

6) $[\lambda(A+B)]_{ij} = \lambda(A+B)_{ij} = \lambda A_{ij} + \lambda B_{ij} = (\lambda A)_{ij} + (\lambda B)_{ij} = \lambda A + \lambda B$

7) $[(\lambda\mu)A]_{ij} = (\lambda\mu)A_{ij} = \lambda(\mu A_{ij}) = (\lambda)(\mu A)_{ij} \Rightarrow (\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$

8) $(1\cdot A)_{ij} = 1\,A_{ij} \Rightarrow 1A = A$

свойство на $1 \in F$

Умножение на матрици. Реакция на елементарните преобразувания чрез умножение на матрици

Деф.
Нека $A \in M_{m\times n}(F)$, $B \in M_{n\times k}(F)$. Тогава $AB \in M_{m\times k}(F)$ т.ч.

$$(AB)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} A_{is}B_{sj} = A_{i1}B_{1j} + \dots + A_{in}B_{nj}$$

$$AB = \begin{pmatrix} A_{i1} & A_{i2} & \dots & A_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{1j} \\ B_{2j} \\ \vdots \\ B_{nj} \end{pmatrix}$$

Матриците се умножават по правилото ред по стълб

Пример

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{22}(\mathbb{Q})$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{22}(\mathbb{Q})$$

$$E_{11}E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0 + 0\cdot 1, & 1\cdot 0 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 0 + 0\cdot 1, & 0\cdot 0 + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{2\times 2}$$

но $E_{21}E_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{21} \neq O_{2\times 2}$

Следователно умножението на матрици не е комутативно. ∃ ненулеви матрици с нулево произведение

ТВ

Умножението на матрици има следните свойства

1) Асоциативност

$(AB)C = A(BC)$ за $A \in M_{m\times n}(F)$, $B \in M_{n,k}(F)$, $C \in M_{k\ell}(F)$

2) $(AB)^t = B^tA^t$ за $A \in M_{m\times n}(F)$, $B \in M_{n\times k}(F)$ $(B^t \in M_{k\times n}(F), A^t \in M_{n\times m}(F)) \Rightarrow$

$B^tA^t \in M_{k\times n}(F)$

3) Дистрибутивни закони

$A(B+C) = AB+AC$ за $A \in M_{m\times n}(F)$ и $B,C \in M_{n\times k}(F)$

$(A+B)C = AC+BC$ за $\forall A,B \in M_{m\times n}(F)$ и $C \in M_{n\times k}(F)$

4) $\lambda(AB) = (\lambda A)B$ за $\forall \lambda \in F$, $A \in M_{m\times n}(F)$, $B \in M_{n\times k}(F)$

Доказателство

1) $[(AB)C]_{ij} = \sum_{s=1}^{k} (AB)_{is}C_{si} = \sum_{t=1}^{n} A_{it}\left(\sum_{s=1}^{k} B_{ts}C_{sj}\right) = \sum_{t=1}^{n} A_{it}(BC)_{tj} \Rightarrow$

$(AB)C = A(BC)$ / разлика на реда на сбирането

2) $[(AB)^t]_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{s=1}^{n} A_{js}B_{si} = \sum_{s=1}^{n} (A^t)_{sj}(B^t)_{is} = (B^tA^t)_{ij} \Rightarrow$

$(AB)^t = B^tA^t$

3) $[(A+B)C]_{ij} = \sum_{s=1}^{n} (A+B)_{is}C_{sj} = \sum_{s=1}^{n} (A_{is}+B_{is})C_{sj}$ при $AB \in M_{m\times n}(F)$ и $C \in M_{n\times k}(F)$

$\Rightarrow A_{is}C_{sj} + B_{is}C_{sj} \Rightarrow (A+B)C = AC+BC$

4) $[\lambda(AB)]_{ij} = \lambda(AB)_{ij} = \lambda\left(\sum_{s=1}^{n} A_{is}B_{sj}\right) =$

$\sum_{s=1}^{n} (\lambda A_{is})B_{sj} = \sum_{s=1}^{n} (\lambda A)_{is}B_{sj} = ((\lambda A)B)_{ij}$

асоциативността на произведението

За $\forall n \in \mathbb{N}$ единичната матрица е винаги квадратна (равен брой редове и стълбове)

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in M_{nn}(F)$$

$$(E_n)_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ за } i=j \\ 0 \text{ за } i \neq j \end{cases}$$

За произволна $A \in M_{mn}(F)$ и $\forall B \in M_{nk}(F)$ е в сила

$$AE_n = A \text{ и } E_n B = B$$

Доказателство

$$(AE_n)_{ij} = \sum_{s=1}^{n} A_{is}(E_n)_{sj} = \sum_{s=1}^{n} A_{is}\delta_{sj} = A_{ij}\delta_{jj} = A_{ij}\cdot 1 = A_{ij}$$

$1 \leq i \leq m$

$1 \leq j \leq n$

при B е същото

Тв

елементарните преобразувания върху редовете на $A \in M_{mn}(F)$ се реализират чрез леви умножения с подходящи матрици

Доказателство

Нека $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_i \\ a_m \end{pmatrix}$ е съвкупността от m реда

$$\begin{matrix} & & i & & \\ i & \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} - & a_1 & - \\ & \vdots & \\ - & a_i & - \\ & \vdots & \\ - & a_m & - \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} - & a_1 & - \\ & \vdots & \\ - & \lambda a_i & - \\ & \vdots & \\ - & a_m & - \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \in M_{m \times m}(F) \quad \lambda \neq 0$$

Умножение на i-тия ред на A с $\lambda \neq 0$

$$\begin{matrix} & & 3 & & \\ i & \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu \\ & & \ddots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} - & a_1 & - \\ & \vdots & \\ - & a_i & - \\ & a_3 & \\ - & a_m & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & a_1 & - \\ & \vdots & \\ - & a_i + \mu a_3 & - \\ & \vdots & \\ - & a_m & - \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Умножение на i-тия ред с $\mu \in F$ и прибавяне към i-тия ред

Разместване на i-тия ред с j-тия стълб

$$\begin{matrix} & & i & & j & \\ i & \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_1 \\ a_i \\ \vdots \\ a_j \\ a_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_j \\ \vdots \\ a_i \\ a_m \end{pmatrix} \end{matrix}$$

За стълбове

елементарните преобразувания към стълб на матрицата A се реализират чрез десни умножения с подходящи матрици

Умножение на детерминанти

Т Ако $A, B \in M_{n \times n}(F)$ то $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Лема

Ако $A \in M_{n \times n}(F)$, $B \in M_{m \times m}(F)$, $C \in M_{n+m}(F)$ т.

$$C = \begin{matrix} \\ n \\ m \end{matrix}\begin{pmatrix} \overset{n}{A} & \overset{m}{0} \\ * & B \end{pmatrix}$$ то твърдя че

$$\det(C) = \det(A)\det(B)$$

С индукция по размера n на A; за $n=1$ имаме

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ * & B \end{pmatrix}$$ развиване по ред

$$(-1)^{1+1} a_{11} \det(B) = a_{11}\det(B)$$

за произволно естествено $n > N$

Нека $A'_{11}\ A'_{12} \dots A'_{1n}$ са матрици получени от A чрез премахване на 1-ви ред и съответно стълбовете с номера

$$\det(C) \underset{\text{1 ред}}{\overset{\text{разв по}}{=}} \sum_{s=1}^{n} (-1)^{1+s} a_{1s} \det\begin{pmatrix} A'_{1s} & O_{(n-1)\times m} \\ * & B \end{pmatrix} =$$

$$\left(\sum_{s=1}^{n} (-1)^{1+s} a_{1s} \det(A'_{1s})\right)\det B$$ развитие по $\det(*)$ по 1-ви ред

$$\det(A)\det(B)$$